12 hal

Offert par l'auteur à la
Bataviaasch Genootschap ...
[signature]

GÉNÉRALISATIONS ET MODIFICATIONS D'UN THÉOREME DE FROBENIUS

Extrait des *Annales de la Société scientifique de* [illegible]
Tome XLII, première partie, *Documents et Comptes rendus*, p. 322
Session des 11 et 12 avril 1923. Première Section.

Généralisations et Modifications

D'UN

Théorème de Frobenius

PAR

MAURICE LECAT

LOUVAIN
« Établissements F. CEUTERICK »
60, RUE VITAL DECOSTER, 60

1923

Généralisations et Modifications d'un Théorème de Frobenius

1. Si $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n \leqslant p$ et si la distribution des signances est la même pour tous les déterminants, on a la relation ([1]) :

$$(\mathrm{I}) \qquad \Delta_o \equiv \left| \left(1 - \prod_{\nu=1}^{n} \sum_{\rho_\nu = 1}^{r_\nu} \delta_{i_\nu, \rho_\nu} \right) F\left(i_1, \dots, i_n\right) \right|_p =$$

$$\sum_{R=0}^{r_1} (-1)^R \sum_{\rho^{(1)}=1}^{r_1} \cdots \sum_{\rho^{(n)}=1}^{r_n} \left| F\left(\rho^{(1)}_{j1}, \dots, \rho^{(n)}_{n}\right) \right|_{(j=1,\dots,R)}$$

$$\times \left| F\left(\varphi^{(1)}_{K_1}, \dots, \varphi^{(n)}_{K_n}\right) \right|_{(K=1,\dots,p-R)},$$

les n suites $\qquad \rho^{(\nu)}_1, \dots, \rho^{(\nu)}_R, \ \varphi^{(\nu)}_1, \dots, \varphi^{(\nu)}_{p-R} \qquad (\nu = 1, \dots, n),$

constituant n permutations des nombres $1, \dots, p$, pourvu que celles où ν est rang signant soient de même signe.

Par cette relation, un déterminant Δ_o, troué suivant un domaine (à n dimensions), V, rectangulaire et d'arêtes parallèles à celles de la matrice, s'exprime à l'aide de la somme des

$$C(r_1, \dots, r_n) \equiv \sum_{R=0}^{r_1} \prod_{\nu=1}^{n} \binom{r_\nu}{R}$$

produits, chacun de deux mineurs complémentaires, formés dans la matrice totale neutralisée M, le premier facteur de chaque produit étant pris dans le domaine V.

([1]) Cette relation a été donnée, pour les déterminants ordinaires ($n = 2$), et sa démonstration a été esquissée, par G. Frobenius, dans son célèbre Mémoire sur la théorie des formes, intitulé : *Ueber die Elementartheiler der Determinanten*, Sitzgsb. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1894, 1er semestre, pp. 31-44, partic. pp. 41-42. — Cf. Th. Muir, *Note on a Theorem of Frobenius' connected with Invariant-Factors*, Proc. R. Soc. Edinburgh, t. XLII (1921-1922), Part III, pp. 342-347 ; M. Lecat, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 176 (1923. I), p. 972.

2. Démontrons ce théorème. Posons, pour la facilité :

$$D_R \equiv \left| F\left(\rho^{(1)}_{j_1}, \ldots, \rho^{(n)}_{j_n}\right) \right|_{(j=1,\ldots,R)},$$

$$D'_R \equiv \left| F\left(\varphi^{(1)}_{K_1}, \ldots, \varphi^{(n)}_{K_n}\right) \right|_{(K=1,\ldots,p-R)};$$

et désignons : *a)* par N la matrice obtenue en supprimant de M les files se croisant sur un élément de V, soit F $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ ou plus simplement F ; *b)* par W le domaine commun à V et à N ; *c)* par E_R un mineur, d'ordre R, pris dans W et par E'_R le mineur complémentaire pris dans N.

Par la règle de dérivation d'un produit, on a :

$$\frac{\partial}{\partial F} \sum_{R=0}^{r_1} (-1)^R D_R D_{R'} = \sum_{R=0}^{r_1} (-1)^R \frac{\partial D_R}{\partial F} D'_R + \sum_{R=0}^{r_1} (-1)^R D_R \frac{\partial D'_R}{\partial F}.$$

Les seuls termes non-nuls dans la première et dans la deuxième somme du second membre sont fournis respectivement par les D_R et par les D'_R contenant F. Et comme ces deux cas s'excluent, on conclut qu'il n'y a pas de D_R fournissant des termes à la fois aux deux sommes.

Si un D_R contient F, c'est que son ordre $R \neq 0$ et la dérivée figurant dans la première somme est, dans la matrice du D_R, le sous-déterminant de F, c'est-à-dire un E_{R-1} ; quant à D'_R, c'est E'_{R-1}, cofacteur de E_{R-1} dans M et contenu dans N.

Si un D'_R contient F, c'est que $R < r$. Dans ce cas, D_R n'est autre que E_R et, comme plus haut, la dérivée figurant dans la seconde somme est précisément E'_R.

Il en résulte que le second membre de l'égalité (I) peut encore s'écrire :

$$\sum_{\alpha=1}^{r_1} (-1)^{\alpha} E_{\alpha-1} E'_{\alpha-1} + \sum_{\alpha'=0}^{r_1-1} (-1)^{\alpha'} E_{\alpha'} E'_{\alpha'}$$

et cela est vrai pour tout élément F $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ du domaine V.

Comme $\alpha = \alpha' + 1$, on voit que la seconde somme est l'opposée de la première et qu'ainsi l'expression

$$\sum_{R=0}^{r_1} (-1)^R D_R D'_R$$

ne dépend pas du contenu de V, les termes qui contiennent de ses éléments se détruisant entre eux.

Or, si l'on vide V, les D_R s'annulent sauf D_o, auquel on attribue la valeur 1 ; quant à D'_o, il devient le déterminant Δ de la matrice M. La relation (I) est ainsi démontrée.

Remarquons que c'est uniquement pour simplifier les notations qu'on a supposé le vide placé en tête de la matrice. Il est évident que ce choix ne diminue en rien la généralité du théorème, puisque des translations de tranches n'altèrent pas la valeur absolue du déterminant.

Constatons : 1° que le nombre C $(r_1, \ldots, r_n)$ est indépendant de l'ordre p de la matrice M, et 2° que le déterminant Δ_o s'évanouit [1] si $\Sigma r_i > p(n-1)$ (condition non nécessaire), ce qui donne une somme nulle de produits de couples de déterminants [2].

3. La loi du développement suivant les mineurs d'ordre quelconque permet de voir aisément que le second membre de la relation (I) peut être remplacé par l'expression [3] :

$$\text{(II)} \qquad \left| F(i_1, \ldots, i_n) \right|_p + \sum_{\rho_1=1}^{r_1} (-1)^R \sum_{\lambda=1}^{r_1} (\pm_\gamma)^2 \left| F(i_1, \ldots, i_n) \right|.$$

---

[1] Cf. nos *Leçons sur la théorie des déterminants,* Gand, Paris, 1910, pp. 41-42 ; *Abrégé,* 1911, exercice 41, pp. 41-42.

[2] Pour les déterminants ordinaires, des cas très particuliers ont été donnés par : C. Le Paige, *Sur quelques points de la théorie des formes algébriques*, Mém. Soc. R. Sc. Liége, (2) t. IX, 1880, éd. 1882, mém. n° 4, pp. 16-21 ; J. Deruyts, *Sur certaines sommes de déterminants*, ibid., (2) t. X, 1881-1882, éd. 1883, mém. n° 4, pp. 3 à 11 ; Th. Muir, *On vanishing aggregates of determinants*, Proc. R. Soc. Edinburgh, t. XV, 1889, pp. 96-105 [1888].

[3] Cette transformation est faite, pour $n = 2$, par Th. Muir, Proc. R. Soc., Edinburgh, t. XLII, 1921-1922, Part III, pp. 344-345.

$$\times \left\{ 1 - \sum_{\alpha=1}^{\rho_1} \delta_{i_1,\lambda_\alpha} \left[1 - \prod_{2}^{n} \mu \left(1 - \sum_{\theta_\mu = 1 + r_\mu}^{p} \delta_{i_\mu, \theta_\mu} \right) \right] \right|_p ,$$

somme de $\sum_{R=0}^{r_1} \binom{r_1}{R} = 2^{r_1}$ déterminants d'ordre p. Bien entendu, les signances doivent toujours être distribuées de la même manière.

4. Il existe une relation analogue pour le cas d'un vide s'étendant partout à l'extérieur d'un espace axial E (1). On a, en effet, l'égalité :

$$\text{(III)} \qquad \left| F(i_1, \ldots, i_n) \delta_{i_k, \ldots, i_n} \right|_p = \left| F(i_1, \ldots, i_n) \right|_p +$$

$$+ \sum_{\pi=1}^{p} (-1)^\pi \sum_{t=1}^{p} \left| F(i_1, \ldots, i_n) \left\{ 1 - \delta_{i_k, \ldots, i_n} \left[1 - \prod_{1}^{\pi} \alpha \left(1 - \delta_{i_m, t_\alpha} \right) \right] \right\} \right|_p ,$$

qui se démontre en développant les déterminants en fonction de déterminants à espace axial vide (2).

En langage géométrique, on peut dire que : *la différence entre un déterminant plein* Δ *et celui* Δ_0 *obtenu en vidant* Δ *à l'extérieur d'un espace axial* E, *cette différence vaut :*

$$\text{(IV)} \qquad \Delta - \Delta_0 = \sum_{\pi=1}^{p} (-1)^{\pi-1} \sum_{t=1}^{p} \nabla (t_1, \ldots, t_\pi),$$

si $\nabla(t_1, \ldots, t_\pi)$ *désigne un déterminant obtenu à partir de* Δ *en y vidant, au dehors de* E, *les tranches* $t_1, \ldots, t_\pi$ *d'une orientation arbitrairement choisie.*

Remarquons que la valeur $\pi = p$ donne le déterminant

$$\left| F(i_1, \ldots, i_n) \left(1 - \delta_{i_k, \ldots, i_n} \right) \right|_p ,$$

---

(1) Muir *(loc. cit.*, § 6, pp. 345-346) a donné cette relation pour $n = 2$.

(2) Cf. M. Lecat, *Développement des déterminants en fonction de déterminants à espace axial vide,* ANNALES, t. XLII, 1922-1923, 1re partie, pp. 205-215 ; C. R., t. CLXXV, 1922, II, pp. 1185-1188 (séance du 11 décembre).

dont le vide s'étend sur E et est par conséquent complémentaire du vide de Δ_0.

Dans la formule (III), on peut distinguer deux cas : suivant que $m < k$ ou $\geqslant k$, le vide de chaque tranche de l'orientation choisie est respectivement un espace diagonal ou une couche, chacun à $k - 1$ dimensions.

5. Voici des exemples très simples, mais suffisants cependant, pour mettre en lumière la propriété faisant l'objet du n° **4**. On a :

$$\left|\begin{array}{cc|cc} a & b & . & . \\ c & d & . & . \\ \hline . & . & \lambda & \mu \\ . & . & \rho & \sigma \end{array}\right| = - \left|\begin{array}{cc|cc} . & . & l & m \\ . & . & r & s \\ \hline \alpha & \beta & \lambda & \mu \\ \gamma & \delta & \rho & \sigma \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & l & m \\ c & d & r & s \\ \hline \alpha & \beta & . & . \\ \gamma & \delta & . & . \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|cc} . & . & l & m \\ . & . & r & s \\ \hline \alpha & \beta & . & . \\ \gamma & \delta & . & . \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} a & . & l & . \\ c & . & r & . \\ \hline . & \beta & . & \mu \\ . & \delta & . & \sigma \end{array}\right| = - \left|\begin{array}{cc|cc} . & b & l & m \\ . & d & r & s \\ \hline \alpha & . & \lambda & \mu \\ \beta & . & \rho & \sigma \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & . & m \\ c & d & . & s \\ \hline \alpha & \beta & \lambda & . \\ \gamma & \delta & \rho & . \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|cc} . & b & . & m \\ . & d & . & s \\ \hline \alpha & . & \lambda & . \\ \gamma & . & \rho & . \end{array}\right|,$$

à condition d'ajouter aux seconds membres le déterminant plein.

6. Données pour le cas des vides rectangulaire ou axial, les lois des n^{os} **3** et **4** se généralisent dans la suivante : *Si la loi de distribution des signances est partout la même, trouer un déterminant* Δ *lui fait perdre la valeur donnée par la relation (IV),* $\nabla(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\pi)$ *désignant* Δ *où les tranches* $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\pi$, *d'une même orientation arbitraire, ont été trouées complémentairement aux tranches correspondantes de* Δ_0.

Le second membre comporte $2^p - 1$ déterminants ; mais si le vide ne s'étend que sur q tranches de l'orientation choisie, ce nombre devient $2^q - 1$, car des déterminants s'évanouissent.

7. *Exemples.* — 1) Le déterminant

$$\begin{vmatrix} . & . & c \\ d & . & . \\ g & h & i \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & . \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ .. & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & . \\ . & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} . & b & . \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & . \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & . & . \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} . & b & . \\ d & e & . \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} . & b & . \\ d & e & f \\ g & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & . \\ g & . & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} . & b & . \\ d & e & . \\ g & . & . \end{vmatrix},$$

et les mêmes relations existent entre les permanents.

2) A condition d'ajouter aux seconds membres le déterminant de la matrice pleine correspondante, on a :

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} . & . & c & \alpha & \beta & . & A & B & C \\ . & . & . & . & . & \nu & L & M & N \\ r & s & . & \rho & . & \tau & R & S & T \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & . & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ . & . & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array} \right|$$

$$- \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & . & . & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & . & L & M & N \\ r & s & t & . & \sigma & . & R & S & T \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & . & . & . & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & . & L & M & N \\ . & . & t & . & \sigma & . & R & S & T \end{array} \right|,$$

si l'on opère sur les tranches juxtaposées dans la représentation en plan ; suivant l'une des deux autres manières, le même déterminant est égal à :

$$- \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & . & . & . & \gamma & . & . & . \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ r & s & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & . & . & . & . \\ r & s & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array} \right|$$

$$- \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ . & . & t & . & \sigma & . & . & . & . \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & . & . & . & \gamma & . & . & . \\ l & m & n & \lambda & \mu & . & . & . & . \\ r & s & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array} \right|$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & . & . & . & \gamma & . & . & . \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ . & . & t & . & \sigma & . & . & . & . \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & . & . & . & . \\ . & . & t & . & \sigma & . & . & . & . \end{array} \right|;$$

et ces relations ont lieu quelle que soit la distribution des signances ; elles valent donc pour le permanent et pour les trois déterminants proprement dits (quasi-persignants).

3)

$$\left|\begin{array}{cc|cc} \cdot & b & e & f \\ c & \cdot & \cdot & h \\ \hline A & B & \cdot & \cdot \\ C & D & G & H \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ \hline A & B & E & F \\ C & D & G & H \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|cc} a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d & g & \cdot \\ \hline A & B & E & F \\ C & D & G & H \end{array}\right|$$

$$- \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ \hline \cdot & \cdot & E & F \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|cc} a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d & g & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & E & F \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|.$$

8. La relation (III), du nº **4**, se généralise encore dans une autre voie. On a, en effet, l'égalité :

$$\left| [F(i_1, \ldots, i_n) - f(i_1, \ldots, i_n)]\, \delta_{i_k, \ldots, i_n} \right|_p = \left| F(i_1, \ldots, i_n) \right|_p +$$

$$+ \sum_{\pi=1}^{p} (-1)^\pi \sum_{r=1}^{p} \Big| F(i_1, \ldots, i_n) + [f(i_1, \ldots, i_n) - F(i_1, \ldots, i_n)].$$

$$\times \left\{ \delta_{i_k, \ldots, i_n} \left[1 - \prod_{1}^{\pi} \left(1 - \delta_{i_r, i_\alpha}\right) \right] \right\} \Big|_p .$$

Donc, à condition de diminuer de $f(i_1, \ldots, i_n)$ les éléments $F(i_1, \ldots, i_n)$ de l'espace axial de Δ_o, les zéros des déterminants ∇ de (IV) peuvent être remplacés par des fonctions arbitraires $f(i_1, \ldots, i_n)$, pourvu qu'elles soient les mêmes pour tous les ∇ [1].

---

[1] Th. Muir *(loc. cit.*, § 9, p. 347) signale cette propriété pour le cas très particulier du déterminant ordinaire, k étant égal à 1. Au § 8 (pp. 346-347), il fait la remarque analogue pour le cas du vide rectangulaire, ce qui est une erreur manifeste ; en effet :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

$$= + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & b & \cdot \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & \cdot \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \cdot & b & \cdot \\ d & e & \cdot \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & b & \cdot \\ d & e & f \\ g & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & \cdot \\ g & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & b & \cdot \\ d & e & \cdot \\ g & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

et les mêmes relations existent entre les permanents.

2) A condition d'ajouter aux seconds membres le déterminant de la matrice pleine correspondante, on a :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \cdot & \cdot & c & \alpha & \beta & \cdot & A & B & C \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu & L & M & N \\ r & s & \cdot & \rho & \cdot & \tau & R & S & T \end{array}\right| = - \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & \cdot & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ \cdot & \cdot & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array}\right|$$

$$- \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \cdot & \cdot & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \cdot & L & M & N \\ r & s & t & \cdot & \sigma & \cdot & R & S & T \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \cdot & L & M & N \\ \cdot & \cdot & t & \cdot & \sigma & \cdot & R & S & T \end{array}\right|,$$

si l'on opère sur les tranches juxtaposées dans la représentation en plan ; suivant l'une des deux autres manières, le même déterminant est égal à :

$$- \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ r & s & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r & s & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array}\right|$$

$$- \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ \cdot & \cdot & t & \cdot & \sigma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & m & n & \lambda & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r & s & t & \rho & \sigma & \tau & R & S & T \end{array}\right|$$

$$+ \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & m & n & \lambda & \mu & \nu & L & M & N \\ \cdot & \cdot & t & \cdot & \sigma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma & A & B & C \\ l & m & n & \lambda & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & t & \cdot & \sigma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|;$$

et ces relations ont lieu quelle que soit la distribution des signances ; elles valent donc pour le permanent et pour les trois déterminants proprement dits (quasi-persignants).

3)

$$\left|\begin{array}{cc|cc} . & b & e & f \\ c & . & . & h \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{B} & . & . \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|cc} a & . & . & . \\ . & d & g & . \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{array}\right|$$

$$- \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ \hline . & . & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ . & . & . & . \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|cc} a & . & . & . \\ . & d & g & . \\ \hline . & . & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ . & . & . & . \end{array}\right|.$$

8. La relation (III), du n° **4**, se généralise encore dans une autre voie. On a, en effet, l'égalité :

$$\Big| [\mathrm{F}(i_1, \ldots, i_n) - f(i_1, \ldots, i_n)]\, \delta_{i_k, \ldots, i_n} \Big|_p = \Big| \mathrm{F}(i_1, \ldots, i_n) \Big|_p +$$

$$+ \sum_{\pi=1}^{p} (-1)^\pi \sum_{t=1}^{p} \Big| \mathrm{F}(i_1, \ldots, i_n) + [f(i_1, \ldots, i_n) - \mathrm{F}(i_1, \ldots, i_n)] \cdot$$

$$\times \left\{ \delta_{i_k, \ldots, i_n} \left[1 - \prod_{1}^{\pi}{}_{\alpha} \left(1 - \delta_{i_r, i_\alpha}\right) \right] \right\} \Big|_p .$$

Donc, à condition de diminuer de $f(i_1, \ldots, i_n)$ les éléments $\mathrm{F}(i_1, \ldots, i_n)$ de l'espace axial de Δ_p, les zéros des déterminants ∇ de (IV) peuvent être remplacés par des fonctions arbitraires $f(i_1, \ldots, i_n)$, pourvu qu'elles soient les mêmes pour tous les ∇ (1).

---

(1) Th. Muir *(loc. cit.*, § 9, p. 347) signale cette propriété pour le cas très particulier du déterminant ordinaire, k étant égal à 1. Au § 8 (pp. 346-347), il fait la remarque analogue pour le cas du vide rectangulaire, ce qui est une erreur manifeste ; en effet :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} . & . & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Ainsi on a :

$$\left|\begin{array}{cc|cc} a-\mathrm{A} & b-\mathrm{B} & . & . \\ . & . & r-\mathrm{R} & s-\mathrm{S} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & p & q \\ c & d & r & s \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & p & q \\ c & d & r & s \end{array}\right|$$

$$- \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & p & q \\ c & d & \mathrm{R} & \mathrm{S} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & p & q \\ c & d & \mathrm{R} & \mathrm{S} \end{array}\right|;$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} a-\mathrm{A} & . & p-\mathrm{P} & . \\ . & d-\mathrm{D} & . & s-\mathrm{S} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & p & q \\ c & d & r & s \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & p & q \\ c & \mathrm{D} & r & s \end{array}\right|$$

$$- \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & \mathrm{P} & q \\ c & d & r & \mathrm{S} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|cc} \mathrm{A} & b & \mathrm{P} & q \\ c & \mathrm{D} & r & \mathrm{S} \end{array}\right|.$$

9. Fondement de la relation générale [n° **6**], le développement suivant les mineurs a lieu, non seulement pour un déterminant, mais encore pour toute fonction ψ linéaire par rapport aux éléments de toute tranche, et par suite définie en appliquant au permanent n'importe quelle règle des signes. Il en résulte que ce qui précède vaut pour les fonctions ψ, à condition bien entendu de n'utiliser, dans une même relation, qu'une seule règle des signes pour toutes les fonctions ψ trouées.

Dans un prochain travail, nous développerons une théorie analogue pour les pfaffiens à n dimensions, dont la définition repose sur certaines de nos recherches publiées en 1910.

Louvain. — Établissements Fr. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.